1, 2, 3, codez ! - Activités cycle 4 - Projet (EPI) « Synthétiseur » - Séance 6 (optionnelle) : Construire une gamme

Discipline dominante	Mathématiques, musique
Résumé	L'écriture d'une partition nécessite de discrétiser des sons (i.e. créer une gamme) : les élèves découvrent que les raisons qui gouvernèrent ces choix furent esthétiques, physiologiques, et mathématiques. Via un tableur, ils calculent eux-mêmes les fréquences de la gamme tempérée. Cette séance est l'occasion de travailler sur la notion d'algorithme.
Notions	Langages • Une gamme est définie pour ne permettre de jouer que des sons harmonieux. Machines • Pour déterminer les fréquences d'une gamme, un ordinateur est bien plus efficace qu'un être humain. Algorithmes • Un algorithme est une méthode permettant de résoudre un problème. • Un algorithme peut contenir des instructions, des boucles, des tests, des variables.
Matériel	Pour la classe : • Un vidéoprojecteur, pour projeter la Fiche 5 Par binôme : • Un ordinateur avec un tableur (Excel, Calc, etc.)
Durée :	Cette séance nécessite 3 sessions de 55 min, sans les éventuels prolongements

Avant-propos

Cette séance (optionnelle, car non indispensable pour la suite, et un peu complexe d'un point de vue conceptuel) sera probablement utile si les élèves souhaitent générer leurs propres sons, ou s'ils veulent approfondir les différences entre les termes « gamme tempérée » et « gamme pythagoricienne » qu'ils auraient pu croiser au détour d'une recherche bibliographique ou d'un cours de formation musicale. S'ils recherchent simplement les valeurs de fréquence, sans vouloir les mesurer sur un instrument réel, l'enseignant peut leur fournir la Fiche 8.

Note scientifique :
Il existe de multiples façons de construire une gamme, selon les critères esthétiques que l'on se fixe. En particulier, la gamme « idéale » devrait répondre à trois critères :

- Avoir un ensemble de notes restreint dans une octave (par exemple en confondant les notes altérées enharmoniques, c'est-à-dire Do# = Réb) ;
- Garantir que toutes les tierces et les quintes soient justes (rapports de fréquences exacts des notes combinées par accords séparés de 3 ou 5 demi-tons respectivement) ;
- Permettre une transposition facile (en multipliant toutes les fréquences de la gamme par un même facteur, on retrouve une autre gamme tout aussi harmonieuse).

En réalité, par la nature harmonique de la musique, c'est impossible. Il faut donc faire des choix.

- La séance explore la gamme tempérée : par construction (une série géométrique), elle obéit exactement au critère 3, et elle se contente de douze demi-tons (critère 1).
- Le premier prolongement étudie la gamme chromatique ou pythagoricienne : c'est la construction la plus ancienne, basée sur des rapports fractionnels itératifs quinte par quinte. Avec 4, 5, 7, 12 demi-tons le critère 1 est facile d'accès ; la construction itérative assure le critère 3 ; par contre l'existence de la « quinte du loup », diffamée et déconseillée, contredit le critère 2.
- Enfin, le second prolongement s'intéresse à la gamme naturelle (aussi appelée gamme zarlinienne) : la simplification des calculs de la gamme pythagoricienne permet de s'affranchir des accords malhabiles (quinte du loup). Par contre elle échoue aux critères 1 et 3 : si on veut transposer, il faut changer de gamme !

Situation déclenchante : quelles sont les fréquences des douze notes de la gamme tempérée ?

Lors de la Séance 4, les élèves ont noté : *Une gamme est définie pour permettre de jouer des sons harmonieux.*
Le professeur de mathématiques reformule alors : *Comment a été décidée la discrétisation des notes musicales ?*

Le professeur commence par faire écouter trois enregistrements de diapasons La2, La3 et La4, sans préciser ni l'instrument ni leur nom, mais en indiquant exclusivement leur fréquence : 220, 440 et 880 Hz, respectivement. Il demande à la classe s'ils reconnaissent ces sons.
Les réponses peuvent être:

- C'est le son de diapasons.
- Les notes se ressemblent, mais elles sont d'octaves plus ou moins graves. Les élèves à l'oreille musicale reconnaîtront trois notes séparées de 2 octaves. Les élèves à l'oreille absolue pourront identifier trois La successifs.

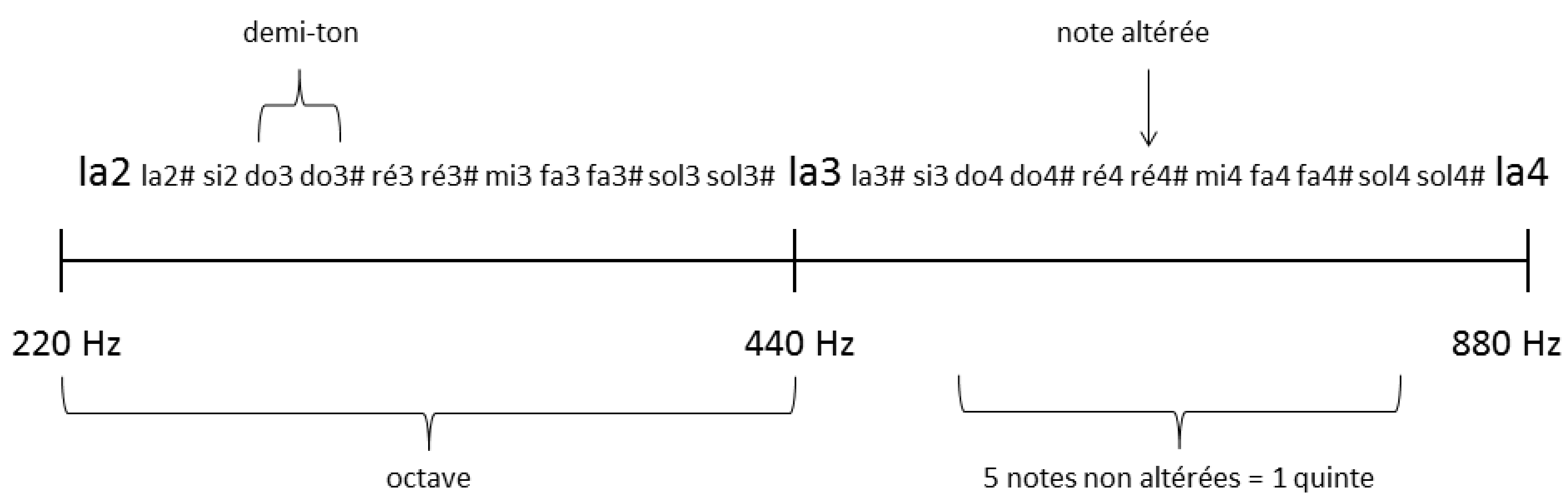
L'enseignant leur confirme qu'il s'agit effectivement des La2 (220 Hz), La3 (440 Hz) et La4 (880 Hz). La fréquence absolue du La3, 440 Hz, a été fixée en 1953 par la Conférence internationale de Londres. Le La2 est le La à l'octave inférieure, et le La4 est le La à l'octave supérieure.

Note pédagogique :
Cette mise en situation peut se faire de multiples autres façons :

- en utilisant un générateur de fonctions et un haut-parleur ;
- en utilisant le générateur de sons inclus dans Audacity (voir Séance 2) ;
- en utilisant un piano et mesurant la fréquence des trois La avec un accordeur.

On peut évidemment partir de trois autres notes séparées de deux octaves.

L'enseignant demande à la classe de rappeler ce qui peuple une octave. La réponse attendue est : un ensemble de douze notes différentes (Do – Do# ou Ré*b* – Ré – Ré# ou Mi*b* – Mi – Fa – Fa# ou Sol*b* – Sol – Sol# ou La*b* – La – La# ou Si*b* – Si). Au tableau, l'enseignant complète au fur et à mesure le schéma suivant :



Il définit ou redéfinit les termes *octave, quinte, demi-ton, altération* (les touches noires sur le piano en partant du Do). Il ajoute en particulier une définition, qui sera la première contrainte du calcul à venir : « *dans une gamme, deux notes séparées d'une octave ont un ratio de fréquence 2* ».

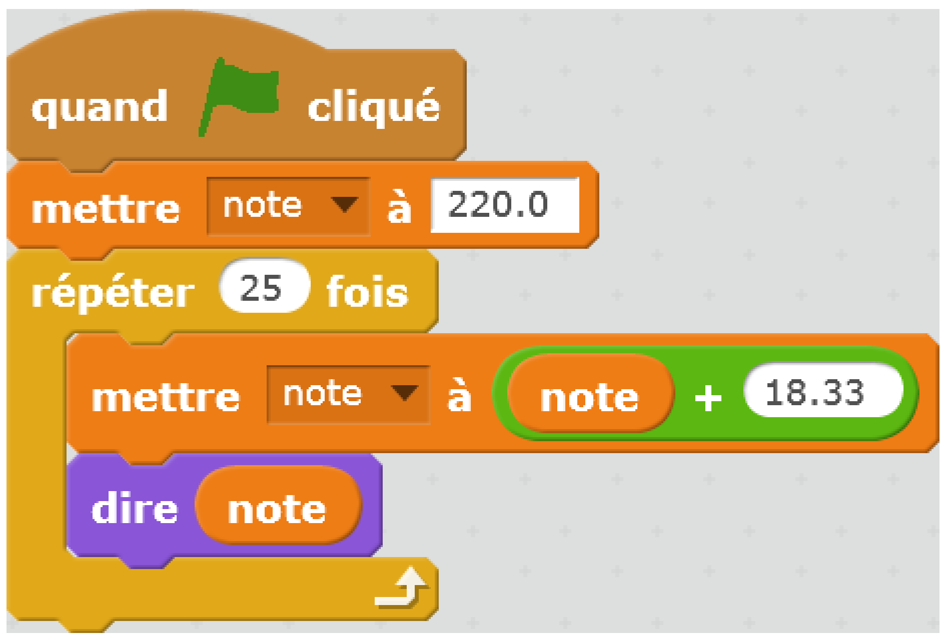
Note scientifique :
Sur ce graphe, nous ne notons que les notes altérées en dièse # (et non en bémol *b*) car nous allons les construire par fréquence croissante (en « quintes ascendantes »).

Le professeur demande alors : *comment définir les fréquences des 11 notes intermédiaires ?* Dans la gamme dite *tempérée*, tous les demi-tons doivent être « de tempérament égal », c'est-à-dire régulièrement répartis. (Le sens de « régulier » est ici laissé volontairement flou.)
Voilà la seconde contrainte (complétant la définition de l'octave) inscrite au tableau : « *les 12 notes sont régulièrement espacées* ».

L'enseignant donne enfin la consigne : *utiliser un tableur pour calculer les fréquences des 22 notes*. Le caractère répétitif des calculs justifie l'utilisation de l'ordinateur. Mais pour une utilisation intelligente de l'ordinateur, le professeur demande aux élèves d'expliciter la méthode, l'algorithme, qu'ils vont utiliser pour résoudre ce problème.

Première tentative : la suite arithmétique

La première idée des élèves est le plus souvent d'utiliser un découpage égal de la première octave : (440-220)/12 = 18,33. Pour que les demi-tons soient équidistants, il faut qu'ils soient séparés de 18,33 Hz.
Leur algorithme, s'il avait dû être programmé avec *Scratch*, aurait ressemblé à ceci :



Les fréquences qu'ils trouvent pour les 25 demi-tons sont indiquées ci-contre. Les treize fréquences du La2 au La3 se répartissent bien régulièrement entre 220 et 440 Hz.
Mais un problème surgit dès qu'on extrapole cette loi arithmétique de raison +18,33 à l'octave du La3 au La4 : la fréquence du La4 est complètement fausse… 660 au lieu de 880Hz !

Notes scientifiques :

- La raison arithmétique peut également être +36,66 Hz si les élèves se sont concentrés sur la seconde octave, ou +27,50 Hz s'ils envisagent les deux octaves dans leur totalité. Dans le premier cas, on ne peut pas retrouver les 220Hz du La2, et dans le second cas, on ne peut pas retrouver les 440Hz du La3.
- Il sera nécessaire de définir ce qu'est une « raison », pour une suite récurrente. On peut, tout simplement, expliquer qu'il s'agit de la valeur permettant de trouver l'élément suivant de la suite (soit par addition, pour une suite arithmétique, soit par multiplication pour une suite géométrique).

Note	**Fréquence (Hz)**
La2	220,000
La#2	238,333
Si2	256,667
Do3	275,000
Do#3	293,333
Ré3	311,667
Ré#3	330,000
Mi3	348,333
Fa3	366,667
Fa#3	385,000
Sol3	403,333
Sol#3	421,667
La3	440,000
La#3	458,333
Si3	476,667
Do4	495,000
Do#4	513,333
Ré4	531,667
Ré#4	550,000
Mi4	568,333
Fa4	586,667
Fa#4	605,000
Sol4	623,333
Sol#4	641,667
La4	660,000

Suite arithmétique à raison simple

Seconde tentative : suite arithmétique à raison variable

Que les élèves s'aperçoivent du problème eux-mêmes ou que l'enseignant le leur souligne, ils tentent de combiner plusieurs solutions. Si les fréquences des notes de la seconde octave doivent être le double de leur alter ego de la première octave, pourquoi ne pas doubler la raison arithmétique après le La3 ? De 220 à 440 Hz, la raison serait de 18,33 Hz et 36,66 Hz de 440 à 880 Hz.
Leur algorithme devient :

Voici ci-contre les fréquences qu'ils obtiennent.

Note	Fréquence (Hz)
La2	220,000
La#2	238,333
Si2	256,667
Do3	275,000
Do#3	293,333
Ré3	311,667
Ré#3	330,000
Mi3	348,333
Fa3	366,667
Fa#3	385,000
Sol3	403,333
Sol#3	421,667
La3	440,000
La#3	476,667
Si3	513,333
Do4	550,000
Do#4	586,667
Ré4	623,333
Ré#4	660,000
Mi4	696,667
Fa4	733,333
Fa#4	770,000
Sol4	806,667
Sol#4	843,333
La4	880,000

Suite arithmétique à raison variable

Le problème semble résolu. Cependant, le professeur leur demande si ce découpage est réellement régulier. À quoi ressemble l'octave du Do3 au Do4 ? Elle n'est pas régulière, car l'intervalle change en cours de route.
De même, avec cette méthode, les gammes ne seraient pas les mêmes si on les calculait à partir d'un Sol, d'un Do ou de n'importe quelle autre référence.

Note scientifique :
Historiquement, certaines gammes (comme la gamme naturelle) ont été explicitement définies à partir d'une note précise. Cela rend la transposition très hasardeuse, mais cela donne une certaine couleur à la mélodie. Par exemple, le *Concerto pour clarinette en La* de Wolfgang Amadeus Mozart a été conçu pour être joué sur une gamme définie par rapport au La. *A contrario*, la gamme tempérée a été conçue pour faciliter toute transposition (ainsi que les changements de tonalité en cours de morceau).

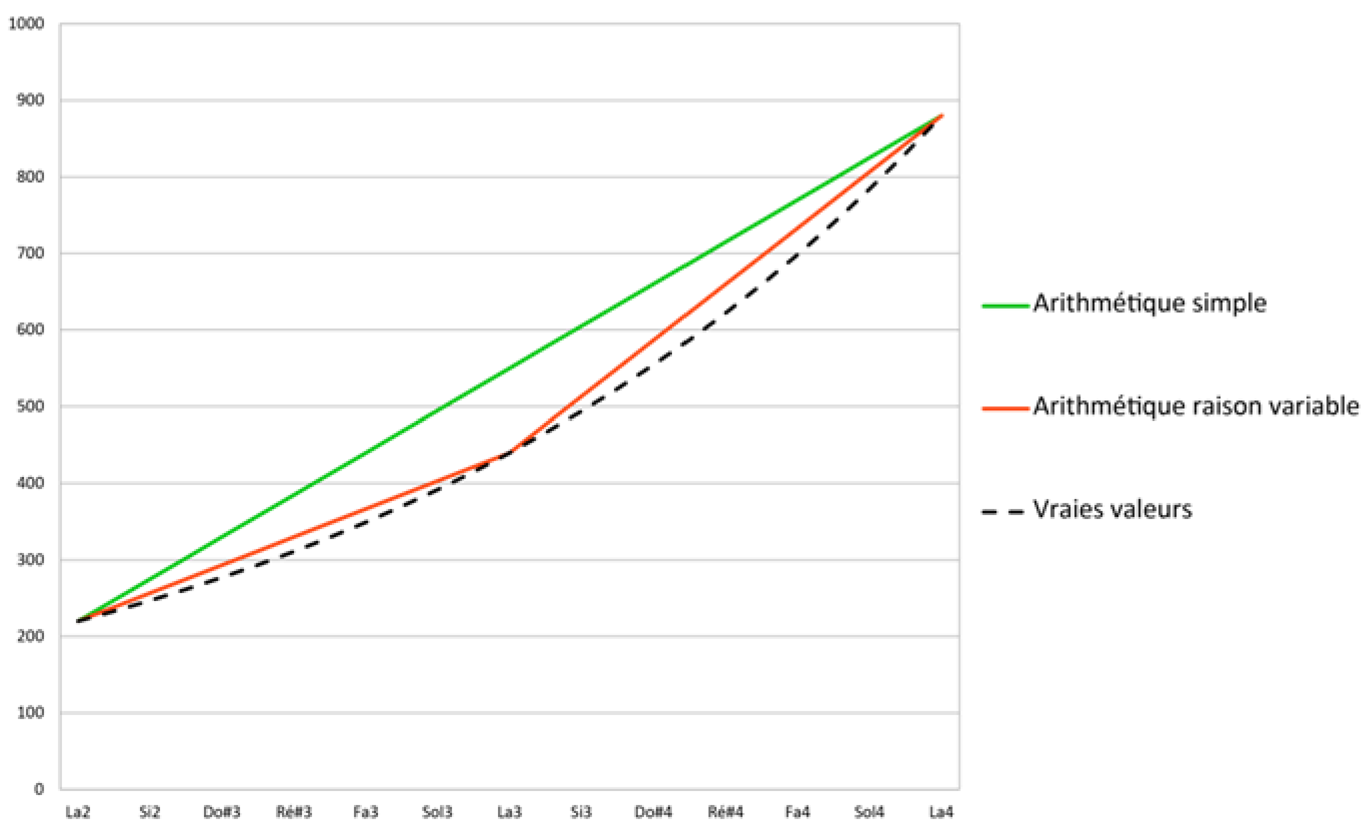
Mise en commun

Le professeur projette la Fiche 5 à l'écran et demande aux élèves de tracer (sur leur tableur), les courbes correspondant aux fréquences qu'ils ont calculées.
Les élèves observent que la courbe obtenue n'est pas une droite, ni même la succession de 2 segments de droite. La tentative arithmétique à raison variable s'approche de la réalité, mais ne fonctionne pas en pratique.

L'enseignant souligne deux incohérences du raisonnement appliqué jusqu'ici : la définition de l'octave fait intervenir une multiplication (par 2) alors que les découpages proposés faisaient tous intervenir des additions. Ne pourrait-on pas tenter de découper l'octave avec des facteurs multiplicatifs à appliquer de demi-ton en demi-ton ? Sachant qu'il faut toujours qu'en fin d'octave, la fréquence de la dernière note soit exactement le double de la fréquence de son *harmonique* inférieure ?

Reformulons la question : *quel est le nombre qui, multiplié par lui-même 12 fois, donne 2 ?*

Les élèves ne connaissant par les « racines douzièmes », ils doivent donc utiliser une nouvelle feuille de calcul pour trouver ce coefficient (en tâtonnant de façon plus ou moins astucieuse) et obtenir les fréquences des 25 notes.



Troisième tentative : trouver la raison de la suite géométrique par « force brute » (collectivement)

Le professeur explique que le nombre que l'on cherche est compris entre 1 et 2. Il demande tout d'abord aux élèves de trouver toutes les valeurs possibles entre 1 et 2 : bien entendu, entre 1 et 2, le nombre de valeurs est infini, donc on doit « discrétiser notre espace de recherche » en jouant sur la précision arithmétique. C'est en faisant grandir cette précision arithmétique que les élèves vont se rendre compte de l'intérêt de trouver une autre méthode que la force brute. [La « force brute » fait référence à un algorithme qui consiste à simplement tester toutes les possibilités, sans astuce particulière. Cette méthode est parfois la seule possible.]

Le professeur leur demande d'abord de dire combien d'essais il faudrait faire pour trouver le résultat avec une précision de « 1 chiffre après la virgule ». Il y a 10 possibilités : 1,0 ; 1,1 ; 1,2 ... 1,9 (rien d'inquiétant à ce niveau, on pourrait tester à la main… mais on ne le fait pas, c'est inutile).
Les élèves réalisent ensuite que, pour une précision de 2 chiffres après la virgule, il aurait fallu tester 100 valeurs possibles (1,00 ; 1,01 ; 1,02 ; 1,03... 1,99). De même, pour une précision de 3 chiffres après

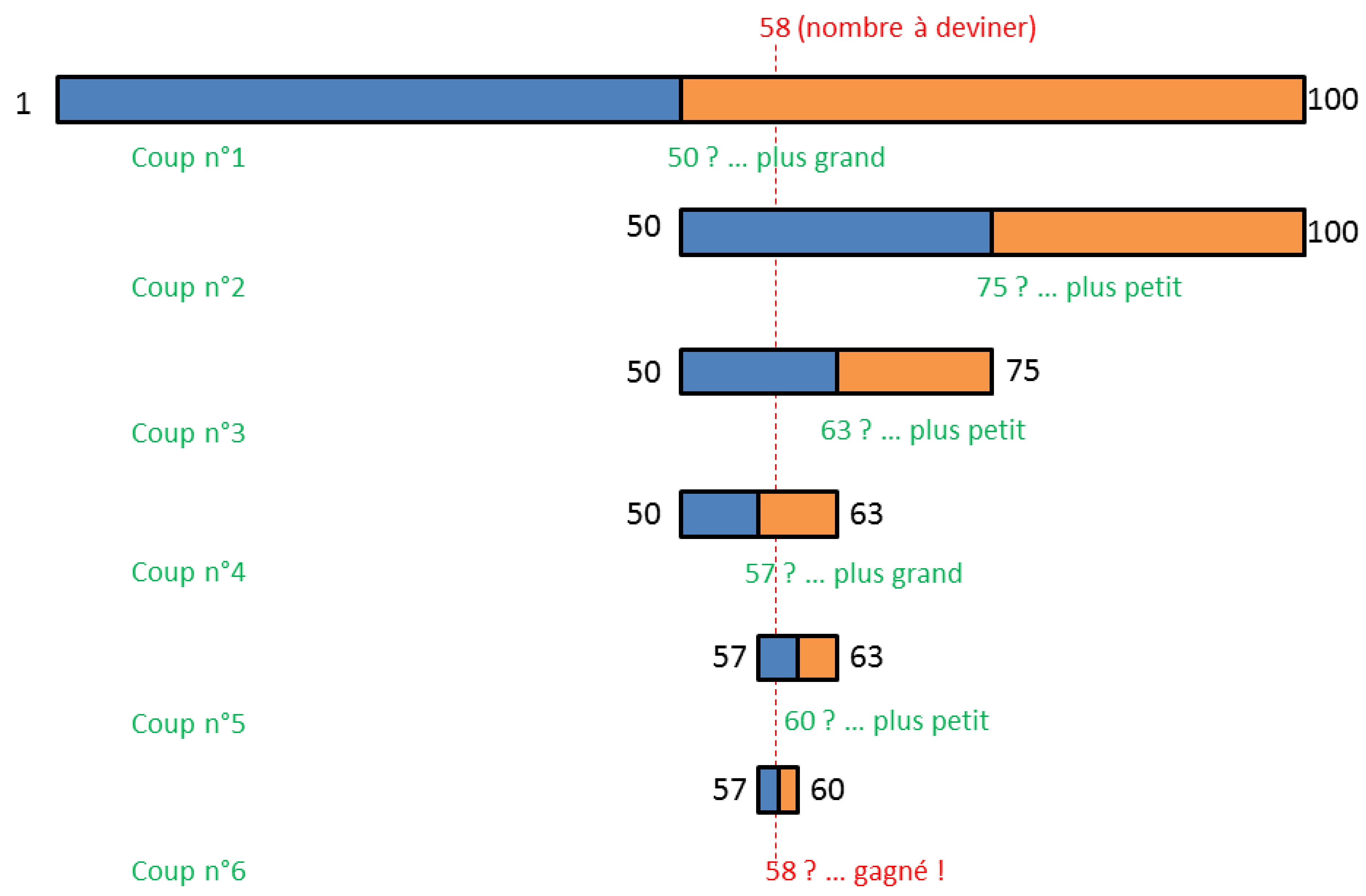
la virgule, il aurait fallu faire 1 000 essais (ce qui, à la main, est excessivement laborieux). Pour 5 chiffres après la virgule, il faudrait 100 000 essais, ce qui est absolument impossible.

La classe en conclut que l'approche par « force brute » est une mauvaise façon de résoudre ce problème.

Introduction de la dichotomie (par binôme, puis collectivement)

Si les élèves ne connaissent pas la dichotomie (ce qui est probable), le professeur peut introduire un petit jeu qui va les guider vers l'explicitation de cette stratégie.
Les élèves jouent par binôme au jeu « devine un nombre entre 1 et 10 ». L'un des élèves imagine un premier nombre dans sa tête, entre 1 et 10 ; et le second doit le deviner en un minimum de coups. Le premier élève (celui qui connaît le nombre), n'a le droit que de répondre par « plus petit », « plus grand » ou « gagné ».
Le professeur recueille le nombre de coups nécessaire dans chaque binôme pour trouver le nombre secret (la médiane devrait être 3 ou 4).

Les élèves explicitent leur méthode pour gagner en un minimum de coups : en général, tout le monde adopte la même stratégie. En visant au milieu des possibles au premier coup, ils savent si le chiffre secret est inférieur ou égal à ce nombre milieu. Ainsi, l'ensemble des possibles a été divisé par deux. Puis ils recommencent jusqu'à trouver le bon résultat, en divisant à chaque fois l'intervalle de recherche par deux. C'est le principe de la dichotomie.
L'enseignant peut aider les élèves en dessinant, au tableau, la recherche au fur et à mesure qu'elle s'effectue. Cela donne, par exemple :



Puis la classe recommence avec, cette fois, un nombre entre 1 et 100 (le nombre médian de coups devrait être 7) ; entre 1 et 1 000 (10 coups) ; et enfin entre 1 et 100 000 (17 coups).

La classe compare le nombre de coups nécessaires par force brute et par dichotomie :

devine un nombre entre 1 et …	nombre de coups par force brute	nombre de coups par dichotomie
10	10	3
100	100	7
1 000	1 000	10
10 000	10 000	13
100 000	100 000	17

Comparaison de la force brute et de la dichotomie (dans le pire des cas, à chaque fois). Pour la force brute, le nombre de coup est, dans le pire des cas, la « taille » du problème (n), tandis que pour la dichotomie, le nombre de coup est $log_2 (n)$

Lorsque la taille du problème augmente d'un facteur 10, la force brute prend 10 fois plus de temps, tandis que la dichotomie ne nécessite que 3 ou 4 coups de plus.

Quatrième tentative : trouver la raison de la suite géométrique par dichotomie (par binôme)

Le professeur ramène la classe sur le problème initial, à savoir trouver le nombre (entre 1 et 2), qui permet de construire une gamme géométrique (gamme tempérée).
Il explique que, pour obtenir un résultat satisfaisant, il faut une précision de 5 chiffres après la virgule.

Les élèves insèrent de nouvelles colonnes dans leur tableur pour affiner peu à peu leur encadrement du facteur recherché, à l'aide de la méthode dichotomique.
Dans le tableau ci-dessous, nous n'illustrons pas les 16 étapes nécessaires, mais uniquement les 5 premières, ainsi que la toute dernière. Les fréquences finales qu'ils doivent trouver sont signalées en orange (nous donnons ici à la fois les essais-erreurs pour différents facteurs testés, jusqu'à trouver la bonne valeur en 4ème colonne (valeur notée en bleu) ; les valeurs des fréquences en 5ème colonne seront obtenues par les élèves dans un second temps):

	essai 5		...essai 16		essai 4	essai 3	essai 2		essai 1	
	1	**1,03125**	**1,05946**	**Fréquence (Hz) de l'essai n°16**	**1,0625**		**1,125**	**1,25**	**1,5**	**2**
La2	1,000	1,000	1,000	220,000	1,000		1,000	1,000	1,000	1,000
La#2	1,000	1,031	1,059	233,082	1,063		1,125	1,250	1,500	2,000
Si2	1,000	1,063	1,122	246,942	1,129		1,266	1,563	2,250	4,000
Do3	1,000	1,097	1,189	261,626	1,199		1,424	1,953	3,375	8,000

Do#3	1,000	1,131	1,260	277,183	1,274	1,602	2,441	5,063	16,000
Ré3	1,000	1,166	1,335	293,665	1,354	1,802	3,052	7,594	32,000
Ré#3	1,000	1,203	1,414	311,127	1,439	2,027	3,815	11,391	64,000
Mi3	1,000	1,240	1,498	329,628	1,529	2,281	4,768	17,086	128,000
Fa3	1,000	1,279	1,587	349,228	1,624	2,566	5,960	25,629	256,000
Fa#3	1,000	1,319	1,682	369,994	1,726	2,887	7,451	38,443	512,000
Sol3	1,000	1,360	1,782	391,995	1,834	3,247	9,313	57,665	1024,000
Sol#3	1,000	1,403	1,888	415,305	1,948	3,653	11,642	86,498	2048,000
La3	1,000	1,447	2,000	440,000	2,070	4,110	14,552	129,746	4096,000
La#3				466,164					
Si3				493,883					
Do4				523,251					
Do#4				554,365					
Ré4				587,330					
Ré#4				622,254					
Mi4				659,255					
Fa4				698,456					
Fa#4				739,989					
Sol4				783,991					
Sol#4				830,609					
La4				880,000					

Cinq premières étapes de la recherche de la raison géométrique, à l'aide de la dichotomie, pour une précision de 1 cent millième. Les fréquences finales sont données à côté de la solution.

La classe vérifie rapidement que la fréquence de n'importe quelle note, avec ce nouveau découpage, est toujours le double de celle de la note d'une octave inférieure, et que le découpage serait identique si l'on avait choisi une autre référence. Telle est la gamme tempérée.

Notes scientifiques :

- Le nombre qui, multiplié par lui-même douze fois, donne 2 est évidemment ^{12}?2. Mais une valeur approchée de 1,05946 suffira amplement à ce niveau.
- La gamme tempérée peut faire une bonne introduction à la notion de logarithme au lycée : en effet, par la présence de ce facteur multiplicatif, le nombre de demi-tons n entre deux notes de fréquences f_1 et f_2 est :
  $n = \frac{12}{\ln(2)} ln\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$
- La gamme tempérée est également un exemple d'entité mathématique que les élèves rencontreront bien plus tard (à l'université…) : les *groupes*. Dotée de la transposition comme opérateur (qui est une multiplication fréquentielle), cette gamme illustre le groupe **Z**/12**Z**.

Conclusion

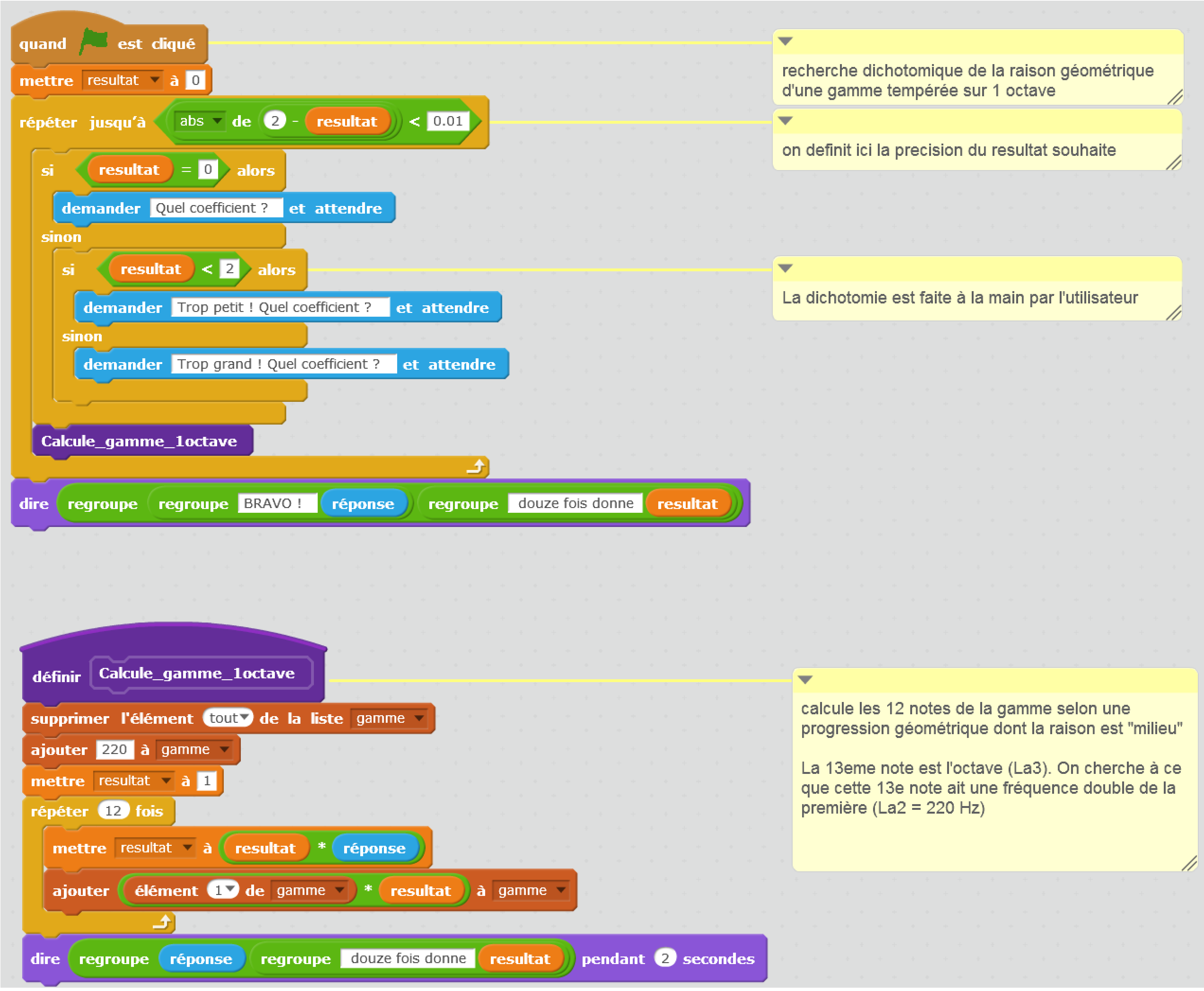
La classe a finalement obtenu une gamme sur laquelle accorder ses synthétiseurs. Si celle-ci est trop grave ou trop aigüe pour leur instrument, les élèves savent qu'ils ne sont qu'à un facteur 2 près de la fréquence souhaitée. Ils pourront également mesurer avec l'accordeur les fréquences du piano de la salle de musique, et vérifier s'il a bien été accordé sur la gamme tempérée !

Prolongement 1 : programmer la dichotomie en *Scratch*

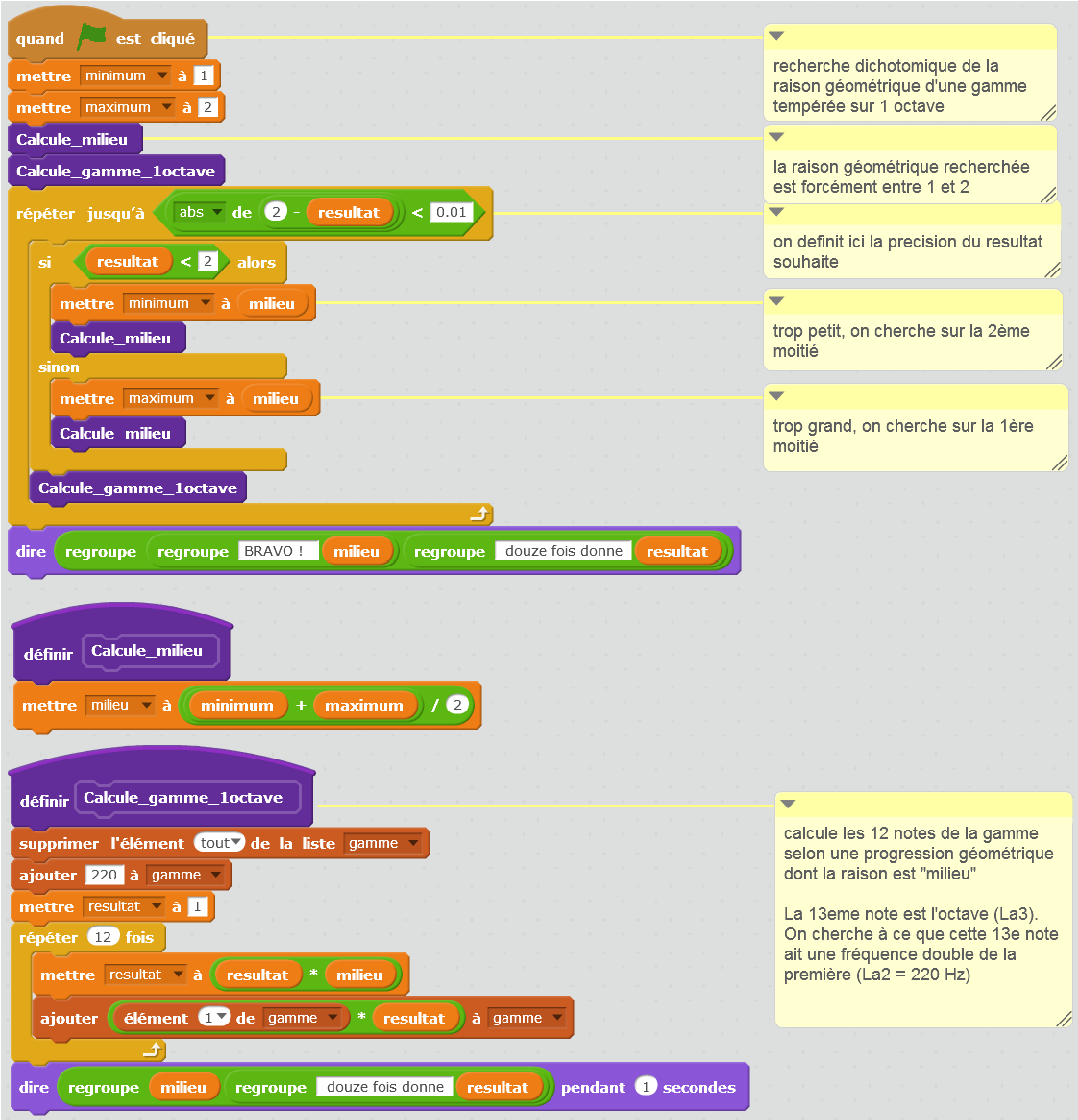
La classe peut décider de programmer la recherche dichotomique en *Scratch*. Réaliser un tel programme nécessite plusieurs séances (il faut se familiariser avec les variables de type « liste » et les « fonctions » qui évitent, entre autre, de manipuler des boucles imbriquées les unes dans les autres).
La programmation peut se faire à 2 niveaux :

- Niveau 1 : la dichotomie est faite par l'utilisateur « à la main » : c'est lui qui entre la valeur à tester (libre à lui de prendre le milieu ou non), le programme se chargeant de calculer la gamme et de l'informer du résultat « trop petit » ou « trop grand », en fonction d'une précision donnée préalablement. Dans l'exemple ci-dessous, la précision est de 1%.
- Niveau 2 : la dichotomie est calculée automatiquement par le programme. Le seul paramètre que l'utilisateur peut avoir à changer est la précision du résultat voulu.

Programme « niveau 1 » appliqué au problème de la gamme tempérée.



Programme « niveau 2 » appliqué au problème de la gamme tempérée.



Prolongement 2 : la gamme chromatique

Comme nous l'avons annoncé en avant-propos, il existe plusieurs gammes, et les élèves peuvent étudier la gamme *chromatique* à 12 notes. (On pourrait se limiter à l'étude de la gamme *pythagoricienne* à 7 notes, construite exactement sur le même principe.)

L'enseignant distribue à chaque binôme la Fiche 6. Il demande aux élèves de refaire pas à pas les calculs de Pythagore. L'enseignant commence au tableau, et à la main, le calcul fractionnel des premières notes demandées (Sol1, Ré2, La2). Puis les élèves déroulent le reste des calculs avec Excel.

La première question consiste à calculer le cycle des quintes pour douze notes.

Note	Fa0	Do1	Sol1	Ré2	La2	Mi3	Si3
Rapport	$\frac{2}{3}$	**1**	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$
Fréquence	43,5	65,8	97,8	146,7	**220**	330	495
Note	**Fa#4**	**Do#5**	**Sol#5**	**Ré#6**	**La#6**	**Fa7**	
Rapport	$\frac{729}{64}$	$\frac{2187}{128}$	$\frac{6561}{256}$	$\frac{19683}{512}$	$\frac{59049}{1024}$	$\frac{177147}{2048}$	
Fréquence	742,5	1113,7	1670,6	2506,0	3758,9	5638,4	

Toutes ces notes sont audibles (l'oreille humaine est sensible sur une plage de fréquences de 16 à 20 000 Hz). Cependant ces notes se trouvent espacées sur huit octaves ! Il faut donc « rabattre » toutes les notes sur l'octave 1.

Note	Fa0	Do1	Do#1	Ré1	Ré#1	Mi1	Fa1
Rapport	$\frac{2}{3}$	**1**	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{19683}{16384}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{177147}{131072}$
Fréquence	43,5	65,8	69,6	73,3	78,3	82,5	88,1
Note	**Fa#1**	**Sol1**	**Sol#1**	**La1**	**La#1**	**Si1**	
Rapport	$\frac{729}{512}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6561}{4096}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{59049}{32768}$	$\frac{243}{128}$	
Fréquence	92,8	97,8	10,4	110	117,5	123,7	

Nous avons laissé ici sciemment la valeur de Fa0. Il y a en effet deux façons d'obtenir la fréquence du Fa1 : soit en multipliant par 2 celle du Fa0 (ce qui donne 86,91 Hz) soit en rabattant le Fa7 dans l'intervalle [1,2] en la divisant par 2^6=64 (ce qui donne 88,09 Hz). Il y a donc un problème : le cycle de douze quintes ne retombe pas sur huit octaves entières (car les puissances de $3^p/2^q$ ne peuvent jamais donner des multiples de 2). En pratique, on calcule le Fa1 par rapport au Fa0, et on n'introduit pas de Fa1' issu du Fa7 : l'oreille les distinguerait mal, et il faut bien s'arrêter quelque part.
Un autre problème, du même ordre, surgit : logiquement, La#1 et le Fa2 (de rapport 8/3, soit 86,91 Hz) devraient former une quinte. Cependant, leur rapport est de :

$$\left(\frac{8}{3}\right) \Big/ \left(\frac{59049}{32768}\right) = \frac{262144}{177147} \approx 1{,}479 < \frac{3}{2}$$

En conséquence, si l'on joue ces deux notes simultanément, l'impression est étrange, comme une sorte de battement à la manière d'une alarme : on dit que la quinte « hurle ». Cette quinte du loup est historiquement proscrite : on répugne à l'utiliser dans les mélodies sauf pour créer un effet particulier.

Prolongement 3 : la gamme naturelle

La Fiche 7 compare la gamme chromatique aux gammes mineure et majeure zarliniennes (ou naturelles). Les élèves observent les valeurs des fréquences obtenues : certaines notes sont identiques aux précédentes, mais d'autres varient.

Note	**La3**	**La#3**	**Si3**	**Do4**	**Do#4**	**Ré4**	**Ré#4**	**Mi4**	**Fa4**	**Fa#4**	**Sol4**	**Sol#4**	**La4**
Rapport pythagoricien	1,000	1,068	1,125	1,201	1,266	1,333	1,424	1,500	1,602	1,688	1,802	1,898	2,000
Gamme en la (Hz)	440,00	469,86	495,00	528,60	556,88	586,67	626,48	660,00	704,79	742,50	792,89	835,31	880,00
Rapport zarlinien	1,000	1,067	1,125	1,200	1,250	1,333	1,440	1,500	1,600	1,667	1,800	1,875	2,000
Gamme en la (Hz)	440,00	469,33	495,00	528,00	550,00	586,67	633,60	660,00	704,00	733,33	792,00	825,00	880,00

L'enseignant leur demande alors de réitérer ces calculs, mais sur une gamme définie par rapport au Do4 que l'on fixe à 521,48 Hz. Cela constitue la gamme *majeure*.

Note	**Do4**	**Do#4**	**Ré4**	**Ré#4**	**Mi4**	**Fa4**	**Fa#4**	**Sol4**	**Sol#4**	**La4**	**La#4**	**Si4**	**Do5**
Rapport pythagoricien	1,000	1,068	1,125	1,201	1,266	1,333	1,424	1,500	1,602	1,688	1,802	1,898	2,000
Gamme en do (Hz)	521,5	556,87	586,67	626,48	660,00	695,31	742,50	782,22	835,31	880,00	939,72	990,00	1042,96
Rapport zarlinien	1,000	1,042	1,125	1,200	1,250	1,333	1,389	1,500	1,563	1,667	1,778	1,875	2,000
Gamme en do (Hz)	521,5	543,21	586,67	625,78	651,85	695,31	724,28	782,22	814,81	869,13	927,08	977,78	1042,96

Note scientifique :

Les élèves remarquent que les formules des deux gammes naturelles ne sont pas identiques ! En réalité, les formules retenues ici ont été choisies parmi plusieurs options. En effet, contrairement aux gammes tempérée ou chromatique, certaines notes enharmoniques sont particulièrement différentes : prenons par exemple le ratio du neuvième demi-ton. En gamme majeure, le Sol# a un ratio de 25/16 par rapport au Do en tant que tierce majeure du Mi, tandis que le La*b* a un ratio de 8/5 en tant que tierce mineure du Fa (dans la gamme mineure, le rapport du neuvième demi-ton, Fa, est toujours de 8/5 en tant que quinte du Do). Pour que les accords les plus courants de la gamme naturelle majeure sonnent juste, il est habituellement convenu d'attribuer au La*b* le ratio du Sol#. (Pour laisser ce choix au musicien, Gioseffo Zarlino avait même conçu un clavecin à trois types de touches pour différencier les notes non altérées, les dièses et les bémols !)

La gamme pythagoricienne retombe sur les mêmes valeurs de fréquence pour Ré4, Mi4 et La4 (on montre immédiatement que Si4 est bien le double de Si3). La transposition (de La en Do ou de Do en La) sera facile et agréable à l'oreille. Par contre la *gamme naturelle en Do* n'obtient aucune des valeurs précédentes (même là où les coefficients étaient identiques entre gamme mineure et gamme majeure) : la musique sonnera de façon subtilement étrange si on essaie de la transposer !